

14. Стереометрическая задача

Блок 1. ФИПИ (www.fipi.ru)

1) Куб

Задание 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=5$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=4:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=1:3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

Задание 4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 3. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=2$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Задание 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=3:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Задание 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=2:1$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

Задание 7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N – середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N=6$.

Задание 8. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N – середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N=9$.

II) Параллелепипед

Задание 9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=5:3$ и $B_1F:FB=5:11$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=2\sqrt{2}$, $AD=6$, $AA_1=10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=3:2$ и $B_1F:FB=3:7$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=4\sqrt{2}$, $AD=30$, $AA_1=35$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1E:EA=6:1$ и $B_1F:FB=3:4$. Точка T – середина ребра B_1C_1 .

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

Задание 12. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 5$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

Задание 13. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 4$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

Задание 14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

Задание 15. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

Задание 16. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Задание 17. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 16$, $AB = 15$.

Задание 18. Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 12$, $AB = 8$.

III) Четырехугольная призма

Задание 19. На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB=4$, $AA_1=6$.

Задание 20. На ребре AA_1 правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка K , причём $AK:KA_1=1:2$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

а) Докажите, что $DM:MD_1=2:1$.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB=3$, $AA_1=9$.

Задание 21. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1 L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Задание 22. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=2$, $C_1 L=8$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

Задание 23. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{3}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1 L=2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 24. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На ребрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK=C_1 L=1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 25. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : K C_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

- Докажите, что точка N – середина ребра BC .
- Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 72, а высота призмы равна 2.

Задание 26. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : K C_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

- Докажите, что точка N – середина ребра BC .
- Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

Задание 27. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Задание 28. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=4$ и $BC=3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : M D_1 = 1 : 3$, а точка K – середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Задание 29. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

- Докажите, что точка M – середина ребра $A_1 B_1$.
- Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : K C_1 = 2 : 3$.

Задание 30. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

- Докажите, что точка M – середина ребра $A_1 B_1$.
- Найдите высоту призмы, если её объём равен 16 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : K C_1 = 1 : 3$.

Задание 31. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=5$ и $BC=4$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 4$, а точка K – середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .
- Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Задание 32. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K – середина ребра DD_1 .

- Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .
- Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

IV) Треугольная призма

Задание 33. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6 , а боковое ребро AA_1 равно 3 . На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L – середины рёбер $A_1 C_1$ и $B_1 C_1$ соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Задание 34. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12 , а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=2$, $B_1 L=4$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

Задание 35. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6 , а боковое ребро AA_1 равно 3 . На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1 L=2$. Точка M – середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 36. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK=B_1L=3$. Точка M – середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка M , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Задание 37. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=1$.

- Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Задание 38. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=B_1N=C_1K=2$.

- Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

Задание 39. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=3$.

- Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

Задание 40. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM=BN=2$.

- Точки O и O_1 – центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

Задание 41. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

- Докажите, что $KM \perp AC$.
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Задание 42. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC . Точка K – середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB=10$, $AC=16$ и $AA_1=5$.

Задание 43. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB=1:3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость a , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость a параллельна ребру AB .

б) Найдите отношение, в котором плоскость a делит отрезок PQ , считая от точки P , если известно, что $AB=AA_1$, $AB:BC=2:5$.

Задание 44. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP:PB=1:3$, а точка Q – середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость a , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость a параллельна ребру AB .

б) Найдите отношение, в котором плоскость a делит отрезок PQ , считая от точки P , если известно, что $AB=AA_1$, $AB:BC=2:7$.

V) Четырёхугольная пирамида

Задание 45. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3$, $SB=5$, $SD=3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Задание 46. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=12$ и $BC=5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=5$, $SB=13$, $SD=10$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

Задание 47. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

Задание 48. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=12$ и $BC=5$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=3\sqrt{3}$, $SB=\sqrt{171}$, $SD=2\sqrt{13}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

Задание 49. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$ и $BC=3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11}$, $SB=3\sqrt{3}$, $SD=2\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Задание 50. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$ и $BC=2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{7}$, $SB=2\sqrt{3}$, $SD=\sqrt{11}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

Задание 51. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=2\sqrt{2}$, $BC=4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=4$.

Задание 52. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=6$, $BC=6\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=9$.

Задание 53. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=3\sqrt{2}$, $BC=6$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=9$.

Задание 54. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB=4$, $BC=4\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P – середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD=8$.

Задание 55. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

Задание 56. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K – точка пересечения прямых AB и CD .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB=BC=CD=2$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 12.

Задание 57. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными 9 и 4 соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM:MD=2:3$, $BN:NC=1:3$. Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- Докажите, что $SK:KC=2:1$.
- Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

Задание 58. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными 8 и 3 соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM:MD=3:2$, $BN:NC=1:2$. Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- Докажите, что $SK:KC=6:1$.
- Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

Задание 59. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD=7$, $BC=5$, $SO=4$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

Задание 60. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD=10$, $BC=8$, $SO=8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

Задание 61. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Задание 62. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=4$ и диагональю $BD=7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS – точка F так, что $SF=BE=3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Задание 63. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=4$ и $AK=3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

Задание 64. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=DN=AK=2$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

Задание 65. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Задание 66. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит M и K .

- Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

Задание 67. Точка M – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N лежит на ребре SB , $SN:NB=1:2$.

- Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN , если все рёбра пирамиды равны 12.

Задание 68. Точка M – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N лежит на ребре SB , $SN:NB=1:2$.

- Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .
- Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN , если все рёбра пирамиды равны 6.

Задание 69. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Задание 70. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Задание 71. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM:MD=2:1$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Задание 72. На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM:MD=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

Задание 73. Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

- Плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке L . Докажите, что $BN:NC=DL:LS$.
- Плоскость α делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если $BN:NC=1:2$.

Задание 74. Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

- Плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке L . Докажите, что $BN:NC=DL:LS$.
- Плоскость α делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если $BN:NC=1:3$.

VI) Треугольная пирамида

Задание 75. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=5\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:3$. Найдите площадь сечения MNB .

Задание 76. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=9\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=2:7$. Найдите площадь сечения MNB .

Задание 77. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB=BC=AC=6\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA=DN:NC=1:2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

Задание 78. В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 8\sqrt{2}$.

- Докажите, что эта пирамида правильная.
- На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM:MA = DN:NC = 1:3$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

Задание 79. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 2:1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

Задание 80. В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT:TD = 1:2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

Задание 81. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Задание 82. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Задание 83. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 84. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 85. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 86. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 7. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 87. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 88. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Задание 89. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 12, а высота пирамиды равна 1. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=3$ и $AK=\frac{7}{4}$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

Задание 90. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона AB основания равна 6, а высота пирамиды равна 2. На рёбрах AB , AC и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM=AN=2$ и $AK=\frac{4}{3}$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

Задание 91. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=4$, $SK:KB=1:3$.

- Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $ВСКМ$.

Задание 92. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{37}$. На рёбрах AB и SA отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK:KB=1:3$.

- Докажите, что плоскость $СКМ$ перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $АСКМ$.

Задание 93. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=1:2$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Задание 94. На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM:MB=CN:NB=3:1$. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Задание 95. На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK:KC=2:3$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат со стороной 2.

- Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 25.

Задание 96. На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK:KC=3:7$. Четырёхугольник $KLMN$ – квадрат со стороной 3.

- Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 100.

VII) Шестиугольная пирамида

Задание 97. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 9. Точка M лежит на ребре AB , $AM=1$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

Задание 98. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. Точка M лежит на ребре AB , $AM=3$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK=KD$.

- Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите площадь треугольника DKM .

Задание 99. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $KM=KD$.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

Задание 100. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 9. Точка M – середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- Докажите, что $KM=KD$.
- Найдите объём пирамиды $CDKM$.

VIII) Цилиндр, конус

Задание 101. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- Найдите объёма цилиндра, если $AB=7$, $BB_1=24$, $B_1C_1=10$.

Задание 102. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объёма цилиндра, если $AB=9$, $BB_1=12$, $B_1C_1=8$.

Задание 103. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=20$, $BB_1=15$, $B_1C_1=21$.

Задание 104. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB=15$, $BB_1=21$, $B_1C_1=20$.

Задание 105. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB=6$, $BB_1=15$, $B_1C_1=8$.

Задание 106. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB=20$, $BB_1=15$, $B_1C_1=21$.

Задание 107. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите расстояние от точки В до прямой AC_1 , если $AB=21$, $BB_1=12$, $B_1C_1=16$.

Задание 108. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А и В, а на окружности другого основания – точки В₁ и С₁, причём ВВ₁ – образующая цилиндра, а отрезок АС₁ пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол АВС₁ прямой.

б) Найдите расстояние от точки В до прямой АС₁, если АВ=15, ВВ₁=16, В₁С₁=12.

Задание 109. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

Задание 110. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, $CC_1 = 2\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

Задание 111. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, АВ=1, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 60° .

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 112. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причём СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

а) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 60° .

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задание 113. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
б) Найдите расстояние от точки В до прямой AC_1 .

Задание 114. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, $CC_1 = 6$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
б) Найдите расстояние от точки В до прямой AC_1 .

Задание 115. Различные точки А, В и С лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок АВ является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

- а) Докажите, что $\cos\angle ASC + \cos\angle BSC = 1,5$.
б) Найдите объём тетраэдра $SABC$, если $SC = 1$, $\cos\angle ASC = \frac{2}{3}$.

Задание 116. Различные точки А, В и С лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок АВ является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

- а) Докажите, что $\cos\angle BSC + \cos\angle ASC = \frac{3}{2}$.
б) Найдите объём тетраэдра $SABC$, если $SC = 2$, $\cos\angle ASC = \frac{3}{5}$.